Integration

af

en lineær Differentialligning

af anden Orden.

Af

Adolph Steen.

Vidensk. Selsk. Skr., 6. Række, naturvidenskabelig og mathematisk Afd. I. 6.

Kjøbenhavn.

Bianco Lunos Kgl. Hof-Bogtrykkeri.

1882.

1. Differentialligningerne

$$y'' - (a \cot x - b \operatorname{tg} x) y' + cy = 0 \tag{1}$$

og

$$v'' + (a \cot x - b \operatorname{tg} x) v' + cy = 0 \tag{2}$$

have, i Følge hvad der er udviklet i Bull. des Sciences Mathém., rédigé par MM. Darboux, Hoüel et Tannery, 2 série, t. V, 1881, p. 30—36, følgende Relationer imellem deres Integraler:

$$\left.\begin{aligned} y &= v' \sin^a x \cos^b x\,, \\ v &= y' \sin^{-a} x \cos^{-b} x\,, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

gyldige uden Hensyn til Fortegnene for a og b. Den ene af Ligningerne (1) vil altsaa være integrabel med den anden.

2. Specielle Tilfælde kunne faas integrerede, naar man sætter

$$y' = u\,, \qquad \frac{d.l.u}{dx} = \alpha \cot x - \beta \operatorname{tg} x\,, \qquad u = \sin^\alpha x \cos^\beta x\,;$$

thi saa skal

$$\begin{aligned} c\int u dx &= ((a - \alpha) \cot x - (b - \beta) \operatorname{tg} x) u \\ &= (a - \alpha) \cos^{\beta+1} x \sin^{\alpha-1} x - (b - \beta) \cos^{\beta-1} x \sin^{\alpha+1} x\,. \end{aligned}$$

Differentiation og Division med $\cos^\beta x \sin^\alpha x$ giver

$$c = (a - \alpha)(\alpha - 1) \cot^2 x - (a - \alpha)(\beta + 1) - (b - \beta)(\alpha + 1) + (b - \beta)(\beta - 1) \operatorname{tg}^2 x\,,$$

hvilket for konstante c er umuligt, med mindre Leddene med $\cot^2 x$ og $\operatorname{tg}^2 x$ forsvinde. Dette kan ske paa følgende fire Maader.

A. $\alpha = a$, $\beta = b$, $c = 0$, $y'' - (a \cot x - b \operatorname{tg} x) y' = 0$, som giver

$$y' = 0 \text{ og } y' = c_1 \sin^a x \cos^b x\,, \qquad y = c_1 \int \sin^a x \cos^b x dx + c_2\,.$$

Anvendes (3) til Integration af (2) for $c = 0$, faas herved v, ligesom man af den foregaaende Integration, gyldig uden Hensyn til Fortegnene for a og b, faar

$$v = c_2 \int \sin^{-a} x \cos^{-b} x dx + c_1\,.$$

B. $\alpha = a, \quad \beta = 1, \quad c = -(b-1)(a+1),$ altsaa i

$$y'' - (a\cot x - b\operatorname{tg} x)y' - (b-1)(a+1)y = 0 \tag{4}$$

har man $\quad y' = c_1 \sin^a x \cos x\,, \qquad y = c_1 \sin^{a+1} x + c_2\,.$

Men prøves Resultatet, viser det sig, at $c_2 = 0$, saa at Integralet bliver

$$y = c_1 \sin^{a+1} x$$

uden Hensyn til Fortegnene for a og b. Derefter findes for

$$v'' + (a\cot x - b\operatorname{tg} x)v' - (b-1)(a+1)v = 0 \tag{5}$$

Integralet $\quad v = c_1 \cos^{-b+1} x\,.$

C. $\alpha = 1, \quad \beta = b, \quad c = -(a-1)(b+1)$ giver

$$y'' - (a\cot x - b\operatorname{tg} x)y' - (a-1)(b+1)y = 0\,, \tag{6}$$

hvori $\quad y' = c_1 \cos^b x \sin x\,, \qquad y = c_1 \cos^{b+1} x\,,$

idet en Prøve viser, at den ved Integrationen indkommende konstante maa være nul. Herefter findes af

$$v'' + (a\cot x - b\operatorname{tg} x)v' - (a-1)(b+1)y = 0 \tag{7}$$

Integralet $\quad v = c_1 \sin^{-a+1} x\,.$

D. $\alpha = 1, \quad \beta = 1, \quad c = -2(a+b-2)$ fører til

$$y'' - (a\cot x - b\operatorname{tg} x)y' - 2(a+b-2)y = 0\,, \tag{8}$$

for hvilken $\quad y' = c_1 \sin x \cos x \quad$ eller $\quad y' = c_1 \sin 2x\,,$

saa at man faar $\quad y = c_1 \cos 2x + c_2\,.$

En Prøve giver $\quad c_2 = \dfrac{c_1(a-b)}{a+b-2}\,,$

altsaa $\quad y = c_1\left(\cos 2x + \dfrac{a-b}{a+b-2}\right) \quad$ eller $\quad y = c_1((a+b-2)\cos 2x + a - b)\,.$

Anvendelse af (3) giver derpaa

$$v'' + (a\cot x - b\operatorname{tg} x)v' - 2(a+b-2)v = 0 \tag{9}$$

integreret ved $\quad v = c_1 \sin^{-a+1} x \cos^{-b+1} x\,.$

3. I Følge den Fremgangsmaade, som er indført paa ovennævnte Sted i Bull. des Mathém., sættes dernæst

$$u = y' = z_1 \cos^\beta x \sin^\alpha x.$$

Derved faas

$$c\int u dx = \left((a-\alpha)\cot x - (b-\beta)\operatorname{tg} x - \frac{z_1'}{z_1}\right) z_1 \cos^\beta x \sin^\alpha x$$

$$= ((a-\alpha)\cos^{\beta+1} x \sin^{\alpha-1} x - (b-\beta)\cos^{\beta-1} x \sin^{\alpha+1} x) z_1 - \cos^\beta x \sin^\alpha x\, z_1'$$

og efter Differentiation og Ordning

$$z_1'' - [(a-2\alpha)\cot x - (b-2\beta)\operatorname{tg} x]z_1' + [c + (a-\alpha)(\beta+1) + (b-\beta)(\alpha+1) - (a-\alpha)(\alpha-1)\cot^2 x - (b-\beta)(\beta-1)\operatorname{tg}^2 x]z_1 = 0. \tag{10}$$

Denne reduceres til (1) for de Værdier af α og β, som ogsaa i 2 ere benyttede. Af disse behøver Tilfældet A, $\alpha = a$, $\beta = b$, uden at $c = 0$, ingen Undersøgelse, da derved opstaar (2), og saaledes den i (3) udtrykte Forbindelse blot gjenfindes. Af de andre Tilfælde betragtes først D.

4. $\alpha = 1$, $\beta = 1$ giver (10) samme Form som (1), men med andre Koefficienter, nemlig

$$z_1'' - ((a-2)\cot x - (b-2)\operatorname{tg} x) z_1' + (c + 2(a+b-2)) z_1 = 0 .$$

Sættes derpaa

$$\begin{aligned} z_1' &= z_2 \cos x \sin x , \\ z_2' &= z_3 \cos x \sin x , \\ &\dots\dots\dots\dots \\ z_{p-1}' &= z_p \cos x \sin x , \end{aligned}$$

faas

$$z_p'' - ((a-2p)\cot x - (b-2p)\operatorname{tg} x) z_p' + (c + 2p(a+b-2p)) z_p = 0 . \tag{11}$$

Saafremt nu for hele positive p

$$c + 2p(a+b-2p) = 0 , \tag{12}$$

saa bliver

$$z_p'' = 0 \quad \text{og} \quad z_p' = \sin^{a-2p} x \cos^{b-2p} x , \tag{13}$$

og deraf igjen

$$z_p = 1 \quad \text{og} \quad z_p = \int \sin^{a-2p} x \cos^{b-2p} x dx ,$$

overalt uden Tilföjelse af en arbitrær konstant Faktor til de partikulære Integraler. I Følge (12) bliver altsaa

$$y'' - (a \cot x - b \operatorname{tg} x) y' - 2p(a+b-2p) y = 0 \tag{14}$$

for positive hele p integreret ved

$$\left.\begin{aligned} y &= \cos^{2p} x + A_1 \cos^{2p-2} x + \dots + A_r \cos^{2p-2r} x \dots + A_{p-1} \cos^2 x + A_p \\ \text{og ved} \quad y &= \int \cos x \sin x dx \int \cos x \sin x dx \dots \int \cos x \sin x dx \int \cos^{b-2p} x \sin^{a-2p} x dx \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

med $p+1$ Integraltegn og uden Integrationskonstanter, da disse vilde give de samme Led, som findes i det første partikulære Integral. De deri indgaaende konstante Koefficienter A_1, $A_2 \dots A_p$ maa dernæst bestemmes. Dette sker ved de ubestemte Koefficienters Methode, som giver

$$A_1 = -\frac{p(b-2p+1)}{a+b-4p+2} ,$$

$$A_r = -\frac{(p-r+1)(b-2p+2r-1)}{r(a+b-4p+2r)} A_{r-1} ,$$

saa at i Almindelighed

$$A_r = (-1)^r C_{p,r} \frac{(b-2p+1)(b-2p+3)\dots(b-2p+2r-1)}{(a+b-4p+2)(a+b-4p+4)\dots(a+b-4p+2r)} .$$

Man kan saaledes finde det fuldstændige Integral af (14), saafremt p er positiv hel. For visse andre p skal det nu søges udtrykt som et bestemt Integral.

5. Sættes nemlig i (15) $\cos 2x = t$, altsaa $\cos x = \sqrt{\frac{1+t}{2}}$, $\sin x = \sqrt{\frac{1-t}{2}}$, faas ved Udeladelse af alle konstante Faktorer

$$y = \int^{p+1} (1+t)^{\frac{1}{2}(b-2p-1)} (1-t)^{\frac{1}{2}(a-2p-1)} dt^{p+1} ,$$

som atter omskrives til et bestemt Integral uden Hensyn til det tilhørende Polynomium i t af Graden p, saa at

$$y = \int_k^t (t-\alpha)^p (1+\alpha)^{\frac{1}{2}(b-2p-1)} (1-\alpha)^{\frac{1}{2}(a-2p-1)} d\alpha .$$

Gjenindføres heri $t = \cos 2x$, bliver

$$y = \int_k^{\cos 2x} (\cos 2x - \alpha)^p (1+\alpha)^{\frac{1}{2}(b-2p-1)} (1-\alpha)^{\frac{1}{2}(a-2p-1)} d\alpha , \tag{16}$$

som med et passende Valg af k og, om fornødent, med et Polynomium i $\cos 2x$ af Graden p skal tilfredsstille (1), saafremt (12) gjælder.

k bestemmes ved Prøven. Af (16) faas

$$y' = -2p \sin 2x \int_k^{\cos 2x} (\cos 2x - \alpha)^{p-1} (1+\alpha)^{\frac{1}{2}(b-2p-1)} (1-\alpha)^{\frac{1}{2}(a-2p-1)} d\alpha , \tag{17}$$

idet $p > 0$ lader Resultatet af Differentiationen med Hensyn til x i Integralets höjere Grænse forsvinde. Heraf udledes igjen, naar blot $p > 1$, saa at den samme Differentiation heller ikke anden Gang efterlader noget Spor,

$$y'' = 4p(p-1)\sin^2 2x \int_k^{\cos 2x} (\cos 2x - \alpha)^{p-2} (1+\alpha)^{\frac{1}{2}(b-2p-1)} (1-\alpha)^{\frac{1}{2}(a-2p-1)} d\alpha$$
$$- 4p \cos 2x \int_k^{\cos 2x} (\cos 2x - \alpha)^{p-1} (1+\alpha)^{\frac{1}{2}(b-2p-1)} (1-\alpha)^{\frac{1}{2}(a-2p-1)} d\alpha .$$

Indføres disse Udtryk i (1) tilligemed

$$\cot x = \frac{1+\cos 2x}{\sin 2x}, \quad \operatorname{tg} x = \frac{1-\cos 2x}{\sin 2x},$$

faar man uden Vanskelighed

$$\int_k^{\cos 2x} (\cos 2x - \alpha)^{p-2} (1+\alpha)^{\frac{1}{2}(b-2p-1)} (1-\alpha)^{\frac{1}{2}(a-2p-1)} \left[4p(p-1)(1-\cos^2 2x) + 2p[a-b+(a+b-2)\cos 2x (\cos 2x - \alpha) + c(\cos 2x-\alpha)^2\right] d\alpha = 0.$$

Saafremt (12) gjælder, er Koefficienten til $\cos^2 2x$ heri

$$-4p^2 + 4p + 2p(a+b) - 4p + c = 0$$

uden Hensyn til Beskaffenheden af p, saa at p ikke længere behøver at være positiv hel, naar blot $p > 1$. Den øvrige Del af Störrelsen i Parenthesen under Integraltegnet er

$$4p(p-1) + 2p(a-b)(\cos 2x - \alpha) + 2p(a+b-4p+2)\alpha \cos 2x - 2p(a+b-2p)\alpha^2 =$$
$$4p(p-1)(1-\alpha^2) + 4p[\tfrac{1}{2}(a-b) + (\tfrac{1}{2}(a+b) - 2p + 1)\alpha](\cos 2x - \alpha) =$$
$$4p(p-1)(1-\alpha^2) + 4p[-\tfrac{1}{2}(b-2p+1)(1-\alpha) + \tfrac{1}{2}(a-2p+1)(1+\alpha)](\cos 2x - \alpha),$$

saa at man ved Integrationens Udførelse skal faa

$$-4p \Big| (\cos 2x - \alpha)^{p-1} (1+\alpha)^{\frac{1}{2}(b-2p+1)} (1-\alpha)^{\frac{1}{2}(a-2p+1)} \Big|_k^{\cos 2x} = 0 .$$

Men for $p > 1$ vil venstre Side heraf ogsaa forsvinde, naar $\cos 2x$ indføres for α, medens $\alpha = k$ vil gjöre den til 0, saafremt $b > 2p - 1$ og $k = -1$ eller $a > 2p - 1$ og $k = +1$, i øvrigt uden Hensyn til Beskaffenheden af p.

Heraf følger, at

$$y'' - (a \cot x - b \operatorname{tg} x) y' - 2p(a + b - 2p) y = 0 \tag{14}$$

for $p > 1$ og $b > 2p - 1$ har Integralet

$$y = \int_{-1}^{\cos 2x} (\cos 2x - \alpha)^p (1 + \alpha)^{\frac{1}{2}(b-2p-1)} (1 - \alpha)^{\frac{1}{2}(a-2p-1)} d\alpha , \tag{18}$$

men for $p > 1$ og $a > 2p - 1$

$$y = \int_{+1}^{\cos 2x} (\cos 2x - \alpha)^p (1 + \alpha)^{\frac{1}{2}(b-2p-1)} (1 - \alpha)^{\frac{1}{2}(a-2p-1)} d\alpha , \tag{19}$$

Hvis altsaa foruden $p > 1$ haves baade $b > 2p - 1$ og $a > 2p - 1$, saa svare begge disse Integraler til (14), hvis fuldstændige Integral saaledes er bestemt under disse Forudsætninger.

Derefter vil i Henhold til (3)

$$v'' + (a \cot x - b \operatorname{tg} x) v' - 2p(a + b - 2p) y = 0 \tag{20}$$

have til Integral (jfr. (17)) det ene af følgende eller dem begge:

$$\left.\begin{aligned} v &= \sin^{-a+1} x \cos^{-b+1} x \int_{-1}^{\cos 2x} (\cos 2x - \alpha)^{p-1} (1 + \alpha)^{\frac{1}{2}(b-2p-1)} (1 - \alpha)^{\frac{1}{2}(a-2p-1)} d\alpha , \\ v &= \sin^{-a+1} x \cos^{-b+1} x \int_{+1}^{\cos 2x} (\cos 2x - \alpha)^{p-1} (1 + \alpha)^{\frac{1}{2}(b-2p-1)} (1 - \alpha)^{\frac{1}{2}(b-2p-1)} d\alpha , \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

nemlig det første, hvis $p > 1$ og $b > 2p - 1$, det sidste, hvis $p > 1$ og $a > 2p - 1$, og dem begge, naar disse Betingelser alle ere opfyldte.

Bliver i (14) og (20) b negativ, saa at man med $-b$ for b og derefter b positiv har

$$\left.\begin{aligned} y'' - (a \cot x + b \operatorname{tg} x) y' - 2p(a - b - 2p) y &= 0 \\ \text{og} \qquad v'' + (a \cot x + b \operatorname{tg} x) v' - 2p(a - b - 2p) v &= 0 , \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

saa kunne (18) og den første (21) ikke bruges, men vel (19) og den sidste (21) som Integraler for henholdsvis den første eller den anden (22), idet man blot sætter ogsaa deri $-b$ for $+b$.

Bliver derimod a negativ i (14) og (20) og man ændrer a til $-a$, saa maa

$$\left.\begin{aligned} y'' + (a \cot x + b \operatorname{tg} x) y' + 2p(a - b + 2p) y &= 0 \\ v'' - (a \cot x + b \operatorname{tg} x) v' + 2p(a - b + 2p) v &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

have til Integraler ikkun henholdsvis (19) og den sidste (21) med a ændret til $-a$.

Et specielt Exempel herpaa faas, naar man af (12) søger

$$2p = \tfrac{1}{2}(a+b) \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}(a+b)^2 + c}$$

og deri sætter $c = -ab$, som giver

$$2p = \begin{cases} a \\ b \end{cases}, \quad \text{altsaa} \quad \left.\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}\right\} > 2, \quad \text{naar } p > 1 .$$

Man ser da, at

$$y'' - (a\cot x - b\operatorname{tg} x)y' - aby = 0 \tag{24}$$

har det fuldstændige Integral

$$y = c_1 \int_{-1}^{\cos 2x} (\cos 2x - \alpha)^{\frac{1}{2}a} (1-\alpha)^{\frac{1}{2}(b-a-1)} (1-\alpha)^{-\frac{1}{2}} d\alpha$$
$$+ c_2 \int_{-1}^{\cos 2x} (\cos 2x - \alpha)^{\frac{1}{2}b} (1+\alpha)^{-\frac{1}{2}} (1-\alpha)^{\frac{1}{2}(a-b-1)} d\alpha ,$$

hvis baade $1 > a - b$ og $1 > b - a$. Er Differensen imellem a og b större end 1, forkastes det første Integral, hvis $b - a$ er negativ, det sidste, hvis $a - b$ er negativ. Det samme gjælder, hvis Differensen er 1, fordi man da ikke kan tilfredsstille Ligningen

$$-4p \Big| (\cos 2x - \alpha)^{p-1} (1+\alpha)^{\frac{1}{2}(b-a+1)} (1-\alpha)^{\frac{1}{2}(a-b+1)} \Big|_{k}^{\cos 2x} = 0$$

ved $k = -1$, naar $b - a = -1$, eller ved $k = +1$, naar $a - b = -1$.

6. Antages dernæst i (10) $\alpha = a$, $\beta = 1$ (jfr. 2. B.), saa faas

$$z_1'' + (a\cot x + (b-2)\operatorname{tg} x) z_1' + (c + (a+1)(b-1)) z_1 = 0 . \tag{25}$$

Denne Ligning afviger fra (1) i Hovedsagen ved, at a har faaet modsat Fortegn, men desuden er $b-2$ traadt istedenfor b, og $c + (a+1)(b-1)$ istedenfor c. Behandlet ved Substitutionen

$$y' = z_1 \cos x \sin^a x$$

er (1) gaaet over til (25); sættes dernæst

$$z_1' = z_2 \cos x \sin^{-a} x ,$$

faas altsaa

$$z_2'' - (a\cot x - (b-4)\operatorname{tg} x) z_2' + (c + 2(a+b-2)) z_2 = 0 \tag{26}$$

af den i (1) angivne Form. Man kan fortsætte med følgende Række Substitutioner

$$z_2' = z_3 \cos x \sin^a x$$
$$z_3' = z_4 \cos x \sin^{-a} x \quad \text{o. s. v.}$$

og kommer derved

$$\left.\begin{array}{lll} \text{for } p \text{ ulige} & \text{til} & z_p'' + (a\cot x + (b-2p)\operatorname{tg} x) z_p' + (c + (a+p)(b-p)) z_p = 0 , \\ \text{for } p \text{ lige} & \text{til} & z_p'' - (a\cot x - (b-2p)\operatorname{tg} x) z_p' + (c + p(a+b-p)) z_p = 0 . \end{array}\right\} \tag{27}$$

Er nu p ulige og $c+(a+p)(b-p)=0$, saa faas

$$z'_p = 0 \quad \text{og} \quad z'_p = \sin^{-a} x \cos^{b-2p} x,$$

hvortil svarer

$$z_p = 1 \quad \text{og} \quad z_p = \int \sin^{-a} x \cos^{b-2p} x\, dx,$$

saa at man finder de to partikulære Integraler

$$\left.\begin{aligned} y &= \int \cos x \sin^a x\, dx \int \cos x \sin^{-a} x\, dx \ldots\ldots \int \cos x \sin^a x\, dx \\ \text{og}\ \ y &= \int \cos x \sin^a x\, dx \int \cos x \sin^{-a} x\, dx \ldots\ldots \int \cos x \sin^a x\, dx \int \sin^{-a} x \cos^{b-2p} x\, dx, \end{aligned}\right\} \quad (28)$$

det første med p, det sidste med $p+1$ Integraltegn.

Men er p lige og $c+p(a+b-p)=0$, følgelig samme Relation som (12) angiver, faas kun nye Formler for et allerede behandlet Tilfælde (jfr. (14)). Disse ere, idet

$$z_p = 1 \quad \text{og} \quad z_p = \int \sin^a x \cos^{b-2p} x\, dx,$$

følgende

$$\left.\begin{aligned} y &= \int \cos x \sin^a x\, dx \int \cos x \sin^{-a} x\, dx \ldots\ldots \int \cos x \sin^{-a} x\, dx \\ \text{og}\ \ y &= \int \cos x \sin^a x\, dx \int \cos x \sin^{-a} x\, dx \ldots\ldots \int \cos x \sin^{-a} x\, dx \int \sin^a x \cos^{b-2p} x\, dx \end{aligned}\right\} \quad (29)$$

med henholdsvis p og $p+1$ Integraltegn.

Integrationerne i den første (28) udføres uden Vanskelighed under endelig Form. Man finder nemlig

$$\begin{aligned} z_{p-1} &= \sin^{a+1} x + B_1, \\ z_{p-2} &= \sin^2 x + B_1 \sin^{-a+1} x + B_2, \\ z_{p-3} &= \sin^{a+3} x + B_1 \sin^2 x + B_2 \sin^{a+1} x + B_3 \ \text{ o. s. v.}, \end{aligned}$$

idet den arbitrære konstante Faktor har optaget i sig de ved Integrationen i første Led fremkommende Faktorer og dernæst ganske er udeladt, medens de andre Integrationskonstanter ere optagne i B_1, B_2, B_3 o. s. v. Derefter maa y, frembragt ved et ulige Antal Integrationer, have Formen

$$\left.\begin{aligned} y = {} & \sin^{a+p} x + B_2 \sin^{a+p-2} x + \ldots + B_{2r} \sin^{a+p-2r} x \ldots + B_{p-1} \sin^{a+1} x \\ & + B_1 \sin^{p-1} x + B_3 \sin^{p-3} x + \ldots + B_{2r+1} \sin^{p-2r-1} x \ldots + B_p, \end{aligned}\right\} \quad (30)$$

hvis konstante Koefficienter maa findes ved en Prøve. Det vil derved ses, at alle B med ulige Indices blive nul, men

$$B_2 = -\frac{(p-1)(a+p)}{2(a-b+2p-2)},$$

$$B_{2r} = -\frac{(p-2r+1)(a+p-2r+2)}{2r(a-b+2p-2r)} B_{2r-2},$$

altsaa i Almindelighed

$$B_{2r} = (-1)^r C_{\frac{p-1}{2},r} \frac{(a+p-2r+2)(a+p-2r+4)\ldots(a+p)}{(a-b+2p-2r)(a-b+2p-2r+2)\ldots(a-b+2p-2)}.$$

$p=1$ giver Tilfældet B i 2.

Paa lignende Maade findes det første Integral i (29). Man faar, under samme Forudsætninger som ovenfor

$$z_{p-1} = \sin^{-a+1} x + B_1,$$
$$z_{p-2} = \sin^2 x + B_1 \sin^{a+1} x + B_2,$$
$$z_{p-3} = \sin^{-a+3} x + B_1 \sin^2 x + B_2 \sin^{-a+1} x + B_3 \text{ o. s. v.},$$

og deraf y efter et lige Antal Integrationer

$$\left.\begin{aligned} y = \sin^p x + B_2 \sin^{p-2} x + B_4 \sin^{p-4} x \ldots + B_{p-2} \sin^2 x + B_p \\ + B_1 \sin^{-a+2p-1} x + B_3 \sin^{-a+2p-3} x + \ldots B_{p-3} \sin^{-a+3} x + B_{p-1} \sin^{-a+1} x. \end{aligned}\right\} \quad (31)$$

Her vilde atter alle B med ulige Indices forsvinde og man faar

$$B_2 = -\frac{p(a-p+1)}{2(a+b-2p+2)},$$

$$B_{2r} = -\frac{(p-2r+2)(a-p+2r-1)}{2r(a+b-2p+2r)} B_{2r-2},$$

analoge med de i 4 fundne A i den første (15), som er ordnet efter Potenser af $\cos x$, medens (31) er ordnet efter Potenser af $\sin x$. Et specielt Tilfælde heraf for $p = 2$ er (8), nu integreret ved

$$y = \sin^2 x - \frac{a-1}{a+b-2},$$

som let ses at stemme med det forhen fundne.

7. Integrationen af (25) kan ogsaa ske i Henhold til det i 5 om den anden (22) anførte, saafremt

$$c + (a+1)(b-1) = -2p(a-b+2-2p)$$

eller

$$c = -(a-2p+1)(b+2p-1).$$

Man faar nemlig af den anden (21) med $-b+2$ for b, z_1 for v, idet $p > 1$ og $a > 2p-1$,

$$z_1 = \sin^{-a+1} x \cos^{b-1} x \int_{+1}^{\cos 2x} (\cos 2x - \alpha)^{p-1} (1+\alpha)^{-\frac{1}{2}(b+2p-1)} (1-\alpha)^{\frac{1}{2}(a-2p-1)} d\alpha,$$

hvoraf sluttes Integralet af

$$y'' - (a \cot x - b \operatorname{tg} x) y' - (a-2p+1)(b+2p-1) y = 0$$

under de samme Forudsætninger, men Formen deraf bliver noget sammensat.

Er dernæst i den første (27)

$$c + (a+p)(b-p) = -2q(a-b+2p-2q)$$

eller

$$c = -(a-2q+p)(b+2q-p),$$

saa kan den integreres ved den anden (21) med $-b+2p$ for b, q for p, hvis $q > 1$ og $a > 2q-1$, altsaa

$$z_p = \sin^{-a+1} x \cos^{b-2p+1} \int_{+1}^{\cos 2x} (\cos 2x - \alpha)^{q-1} (1+\alpha)^{-\frac{1}{2}(b-2p+2q+1)} (1-\alpha)^{\frac{1}{2}(a-2q-1)} d\alpha.$$

Derefter findes et meget sammensat Integral af

$$y'' - (a \cot x - b \operatorname{tg} x)\, y' - (a - 2q + p)(b + 2q - p)\, y = 0.$$

Ligeledes, hvis i den anden (27) er

$$c + p\,(a + b - p) = -2q\,(a + b - 2p - 2q)$$

eller i (1)

$$c = -(p + 2q)(a + b - p - 2q),$$

er Integrationen mulig, for den sidste dog atter under meget sammensat Form. Det lykkes ikke ved bekjendte Midler at ændre de sidste (28) og (29) til bestemte Integraler.

8. Har man $a = 0$, blive begge Ligninger (27)

$$z''_p + (b - 2p) \operatorname{tg} x \,.\, z'_p + (c + p\,(b - p))\, z_p = 0 \tag{32}$$

uden Hensyn til om p er lige eller ulige. Heraf kan Integralet findes, hvis

$$c = -p\,(b - p),$$

hvorved faas

$$z_p = 1 \quad \text{og} \quad z_p = \int \cos^{b-2p} x\, dx.$$

Derefter kunne (28) og (29) bruges til Integration af

$$y'' + b \operatorname{tg} x \,.\, y' - p\,(b - p)\, y = 0. \tag{33}$$

Med positive hele p (jfr. (30) og (31)) faas

$$\left.\begin{aligned} y &= \sin^p x + B_2 \sin^{p-2} x + \ldots B_{2r} \sin^{p-2r} x \ldots \\ \text{og} \quad y &= \int \cos x\, dx \int \cos x\, dx \ldots \int \cos x\, dx \int \cos^{b-2p} x\, dx, \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

af hvilke det første ender med $B_2 \sin x$ eller med B_2, eftersom p er ulige eller lige, og det sidste indeholder $p + 1$ Integraler. Koefficienterne B faas af Udtrykkene i 6 for $a = 0$.

Det sidste Integral i (34) kan gjøres til et bestemt Integral, naar man sætter $\sin x = t$, $\cos x = (1 - t^2)^{\frac{1}{2}}$, hvorved

$$y = \int^{p+1} (1 - t^2)^{\frac{1}{2}(b-2p-1)}\, dt^{p+1} = \int_k^{\sin x} (\sin x - \alpha)^p (1 - \alpha^2)^{\frac{1}{2}(b-2p-1)}\, d\alpha.$$

Heri bestemmes k ved en Prøve, som tillige viser, i hvilken Udstrækning dette Integral er gyldigt. Man faar

$$y' = p \cos x \int_k^{\sin x} (\sin x - \alpha)^{p-1} (1 - \alpha_2)^{\frac{1}{2}(b-2p-1)}\, d\alpha$$

$$\text{og} \quad y'' = p\,(p-1) \cos^2 x \int_k^{\sin x} (\sin x - \alpha)^{p-2} (1 - \alpha^2)^{\frac{1}{2}(b-2p-1)}\, d\alpha$$

$$- p \sin x \int_k^{\sin x} (\sin x - \alpha)^{p-1} (1 - \alpha^2)^{\frac{1}{2}(b-2p-1)}\, d\alpha,$$

blot forudsat, at $p > 1$. Indføres dette i (33), faas

$$\int_k^{\sin x} (\sin x - \alpha)^{p-2} (1-\alpha^2)^{\frac{1}{2}(b-2p-1)} \Big[p(p-1)\cos^2 x - p\sin x(\sin x - \alpha) + bp\sin x(\sin x - \alpha)\Big] d\alpha,$$

som ordnet med Hensyn til $\sin x$ mister Leddene med $\sin^2 x$, medens de øvrige blive

$$p\Big[(p-1)(1-\alpha^2) + (b-2p+1)\,\alpha\,(\sin x - \alpha)\Big],$$

saa at Integralet bliver

$$p \,\Big|(\sin x - \alpha)^{p-1} (1-\alpha^2)^{\frac{1}{2}(b-2p+1)}\Big|_k^{\sin x},$$

hvilket forsvinder, saafremt $k = \pm 1$, $b > 2p - 1$ foruden $p > 1$. Altsaa under disse Betingelser og forøvrigt uden Hensyn til Beskaffenheden af p faar man (33) fuldstændig integreret ved

$$y = c_1 \int_{-1}^{\sin x} (\sin x - \alpha)^{p-1} (1-\alpha^2)^{\frac{1}{2}(b-2p-1)} d\alpha + c_2 \int_{+1}^{\sin x} (\sin x - \alpha)^{p-1} (1-\alpha^2)^{\frac{1}{2}(b-2p-1)} d\alpha. \tag{35}$$

Sættes nu i (11) $a = 2p$, faas

$$z_p'' + (b - 2p)\,\mathrm{tg}\, x \,.\, z_p' + (c + 2pb)\, z_p = 0,$$

og er deri

$$c + 2pb = -q\,(b - q),$$

altsaa

$$c = -(2p + q)\, b + q^2,$$

findes z_p af (35), men y i

$$y'' + b\,\mathrm{tg}\, x \,.\, y' - \big((2p+q)\, b - q^2\big)\, y = 0$$

for positive hele p under en meget sammensat Form.

9. Endnu staar tilbage at behandle (10), naar $\alpha = 1$, $\beta = b$, hvorved faas

$$z_1'' - \big((a-2)\cot x + b\,\mathrm{tg}\, x\big)\, z_1' + \big(c + (a-1)(b+1)\big)\, z_1 = 0, \tag{36}$$

som er af Formen (1) med $-b$ for b. Derfor sættes

$$z_1' = z_2 \cos^{-b} x \sin x,$$

saa at man faar

$$z_2'' - \big((a-4)\cot x - b\,\mathrm{tg}\, x\big) z_2' + \big(c + 2\,(a + b - 2)\big)\, z_2 = 0.$$

Gjöres dernæst

$$z_2' = z_3 \cos^{b} x \sin x,$$
$$z_3' = z_4 \cos^{-b} x \sin x \text{ o. s. v.},$$

faar man tilsidst

$$\left.\begin{array}{ll} \text{for } p \text{ ulige} & z_p'' - \big((a-2p)\cot x + b\,\mathrm{tg} x\big)\, z_p' + \big(c + (a-p)(b+p)\big) z_p = 0 \\ \text{for } p \text{ lige} & z_p'' - \big((a-2p)\cot x - b\,\mathrm{tg} x\big)\, z_p' + \big(c + p\,(a+b-p)\big)\, z_p = 0. \end{array}\right\} \tag{37}$$

Er p ulige og $c + (a - p)(b + p) = 0$, bliver

$$z'_p = 0 \quad \text{og} \quad z'_p = \sin^{a-2p} x \cos^{-b} x,$$

altsaa

$$z_p = 1 \quad \text{og} \quad z_p = \int \sin^{a-2p} x \cos^{-b} x\, dx,$$

hvilket giver

$$\left.\begin{aligned} y &= \int \cos^b x \sin x\, dx \int \cos^{-b} x \sin x\, dx \ldots \int \cos^b x \sin x\, dx \\ \text{og} \quad y &= \int \cos^b x \sin x\, dx \int \cos^{-b} x \sin x\, dx \ldots \int \cos^b x \sin x\, dx \int \cos^{-b} x \sin^{a-2p} x\, dx, \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

saaledes at det første Udtryk indeholder p, det sidste $p + 1$ Integraltegn.

Har man p lige og $c + p(a + b - p) = 0$, bliver

$$z_p = 1 \quad \text{og} \quad z_p = \int \sin^{a-2p} x \cos^b x\, dx,$$

altsaa

$$\left.\begin{aligned} y &= \int \cos^b x \sin x\, dx \int \cos^{-b} x \sin x\, dx \ldots \int \cos^{-b} x \sin x\, dx \\ \text{og} \quad y &= \int \cos^b x \sin x\, dx \int \cos^{-b} x \sin x\, dx \ldots \int \cos^{-b} x \sin x\, dx \int \sin^{a-2p} x \cos^b x\, dx, \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

atter med p Integraltegn i det første, $p + 1$ i det sidste Udtryk. De sidste Formler give kun nye Former for Integrationen af (1), som ere mere sammensatte end de i 4 fundne.

Den første (38) fører til et Integral under endelig Form af Formen

$$y = \cos^{b+p} x + C_2 \cos^{b+p-2} x + \ldots C_{2r} \cos^{b+p-2r} x \ldots C_{p-1} \cos^{b+1} x,$$

hvilket ses ved en Prøve, ligesom i 6; derved bestemmes ogsaa Koefficienterne C, nemlig

$$C_2 = -\frac{(p-1)(b+p)}{2(b-a+2p-2)},$$

$$C_{2r} = -\frac{(p-2r+1)(b+p-2r+2)}{2r(b-a+2p-2r)} C_{2r-2},$$

altsaa i Almindelighed

$$C_{2r} = (-1)^r C_{\frac{p-1}{2}, r} \frac{(b+p-2r+2)(b+p-2r+4)\ldots(b+p)}{(b-a+2p-2r)(b-a+2p-2r+2)\ldots(b-a+2p-2)}.$$

$p = 1$ giver Tilfældet C i 2.

Den første (39), svarende til lige Værdier af p, giver paa lignende Maade

$$y = \cos^p x + C_2 \cos^{p-2} x + \ldots C_{2r} \cos^{p-2r} x \ldots C_p,$$

hvis Koefficienter ere

$$C_2 = -\frac{p(b-p+1)}{2(a+b-2p+2)},$$

$$C_{2r} = -\frac{(p-2r+2)(a-p+2r-1)}{2r(a+b-2p+2r)} C_{2r-2},$$

analoge med Koefficienterne A i 4. For $p = 2$ findes atter (8) integreret, nemlig saaledes

$$y = \cos^2 x - \frac{b-1}{a+b-2}.$$

10. Man kan ogsaa integrere (36) ved hvad der i 5 er anført om den første (22), saafremt (jfr. 7)

$$c + (a - 1)(b + 1) = - 2p(a - 2 - b - 2p)$$

eller

$$c = -(a - 2p - 1)(b + 2p + 1).$$

Dertil bruges (19) med $a - 2$ for a, z_1 for y, idet $p > 1$ og $a - 2 > 2p - 1$, altsaa $a > 2p + 1$. Man faar da

$$z_1 = \int_{+1}^{\cos 2x} (\cos 2x - \alpha)^p (1 + \alpha)^{\frac{1}{2}(b-2p-1)} (1 - \alpha)^{\frac{1}{2}(a-2p-3)} d\alpha,$$

og slutter deraf, at (1) under Formen

$$y'' - (a \cot x - b \operatorname{tg} x) y' - (a - 2p - 1)(b + 2p + 1) y = 0$$

har Integralet

$$y = \int z_1 \cos^b x \sin x \, dx.$$

Hvis dernæst i den første (37) er

$$c + (a - p)(b + p) = - 2q(a - 2p - b - 2q),$$

altsaa

$$c = -(a - 2q - p)(b + 2q + p),$$

faas Integralet af (19) med $a - 2p$ for a, z_p for y, q for p, naar $q > 1$ og $a - 2p > 2q - 1$ eller $a > 2p + 2q - 1$, nemlig

$$z_p = \int_{+1}^{\cos 2x} (\cos 2x - \alpha)^q (1 + \alpha)^{\frac{1}{2}(b-2q-1)} (1 - \alpha)^{\frac{1}{2}(a-2p-2q-1)} d\alpha.$$

Derefter vil atter (1) i følgende Form

$$y'' - (a \cot x - b \operatorname{tg} x) y' - (a - 2p - p)(b + 2q + p) y = 0$$

kunne integreres, men ved et meget sammensat Udtryk.

11. Er $b = 0$, blive begge Ligninger (37) til

$$z_p'' - (a - 2p) \cot x \,.\, z_p' + (c + p(a - p)) z_p = 0. \tag{40}$$

Integralet heraf er strax fundet, naar

$$c = - p(a - p),$$

da man faar

$$z_p = 1 \quad \text{og} \quad z_p = \int \sin^{a-2p} x \, dx.$$

Derefter kan

$$y'' - a \cot x \,.\, y' - p(a - p) y = 0$$

integreres ved (38) og (39), nemlig, saalænge p er positiv hel, ved

$$y = \cos^p x + C_2 \cos^{p-2} x + \ldots C_{2r} \cos^{p-2r} x \ldots,$$

der ender med $C_2 \cos x$ eller med C_2, eftersom p er ulige eller lige, og ved

$$y = \int \sin x \, dx \int \sin x \, dx \ldots \int \sin x \, dx \int \sin^{a-2p} x \, dx. \tag{41}$$

med $p+1$ Integraltegn. (41) ændres til et bestemt Integral, naar man sætter $\cos x = t$, hvorved y paa sædvanlig Maade ændres til

$$y = \int_k^{\cos x} (\cos x - a)^p (1 - a^2)^{\frac{1}{2}(a-2p-1)} da.$$

Prøven viser, ligesom i 8, at $p > 1$, $k = \pm 1$, saafremt $a > 2p - 1$, hvilke ere de eneste Betingelser, der maa gjælde, for at det fundne y skal tilfredsstille (41). Man faar derfor

$$y = c_1 \int_{-1}^{\cos x} (\cos x - a)^{p-1} (1 - a^2)^{\frac{1}{2}(b-2p-1)} da + c_2 \int_{+1}^{\cos x} (\cos x - a)^{p-1} (1 - a^2)^{\frac{1}{2}(b-2p-1)} da. \quad (42)$$

Derefter kan (11) med $b = 2p$ behandles, nemlig

$$z_p'' - (a - 2p) \cot x \,.\, z_p' + (c + 2pa)\, z_p = 0.$$

Har man heri

$$c + 2pa = -q\,(a - q)$$

eller

$$c = -(2p+q)\, a + q^2,$$

findes z_p af (42) og derpaa y i

$$y'' - a \cot x y' - ((2p+q)a - q^2)\, y = 0$$

under en meget sammensat Form.